

BCS-BEC クロスオーバー領域における光格子中フェルミ 原子気体の数値解析

澤田 寿希也

目次

第 1 章	序論	2
第 2 章	研究背景	3
2.1	冷却原子気体	3
2.2	光格子	3
2.3	Feshbach 共鳴	3
2.4	BCS-BEC クロスオーバー	4
第 3 章	クーパー問題	6
3.1	一様系のクーパー問題	6
3.2	光格子中の粒子のエネルギー分散	9
3.3	光格子中のクーパー問題	11
3.4	数値計算	12
3.5	結果	13
第 4 章	BCS-BEC クロスオーバー	14
4.1	BdG 方程式の導出	14
4.2	モデル	16
4.3	数値計算	17
4.4	結果	21
第 5 章	まとめと今後の課題	26
付録 A	モンテカルロ積分	27
	参考文献	29

第 1 章

序論

1995 年に希薄アルカリ原子ボーズ気体でボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) が実現し、2004 年にはフェルミ原子気体の超流動が実現した。この超流動は Feshbach 共鳴と呼ばれるクーパー対形成機構で実現している。また、この機構の特徴である可変な引力相互作用によりフェルミ原子気体の超流動の性質が金属超伝導で知られる弱い引力相互作用の BCS 理論的なものから、強い引力による分子ボゾンの BEC へと連続的に移行する BCS-BEC クロスオーバーが観測できるようになった [1, 2]。近年、レーザーの定在波を用いた周期ポテンシャル中の冷却原子気体の研究が盛んに行われている。この周期ポテンシャルは光格子と呼ばれ、固体の理論の検証の場としても注目されている。

本研究では光格子にトラップされたフェルミ原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域での振る舞いを調べる。まず、光格子中でフェルミ原子気体の束縛状態が存在するかを確認するため、光格子中におけるクーパー問題を解く。次に、BCS-BEC クロスオーバー領域における光格子中のフェルミ原子気体の性質を Bogoliubov-de Gennes (BdG) 方程式 [3] を用いて数値的に解析する。

第 2 章

研究背景

2.1 冷却原子気体

レーザー技術の発展により原子気体を光学的に冷却するレーザー冷却が可能になった [4]。原子は特定の周波数の光を吸収する。レーザー冷却では原子の持つ運動量と逆向きの運動量を持つ光を原子に吸収させることにより原子の運動量をゼロに近づけていき冷却する。3 方向から 6 本のレーザーを当てることにより原子がどの方向に運動量を持っても冷却が可能である。このような実験技術により、数十 μK 以下に冷却した原子気体を冷却原子気体と呼ぶ。冷却原子系では熱的な効果が現れず、量子力学の効果が顕著に表れるという特徴がある。また、系の多くの性質を実験的に制御可能である。

2.2 光格子

原子をトラップする方法として光格子がある。これは原子の吸収線とは大きく異なる周波数のレーザーの定在波の重ね合わせにより、周期ポテンシャルを作り原子をトラップする手法である。本研究では以下のポテンシャルの光格子を扱う。

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = sE_R(\sin^2 qx + \sin^2 qy + \sin^2 qz) \quad (2.1)$$

ここで $s, E_R, q = \pi/d$ はそれぞれレーザーの強度、エネルギー、波数であり d は格子定数である。光格子は固体中の電子系とは異なる性質を持つ。例として、原子間相互作用や原子の格子間の移動のしやすさをレーザーの強度でコントロールできる。他には、レーザーの本数や向きで格子の次元や形を変化させることができる。このような利点により光格子は量子多体系を研究する上で重要であり、固体の理論の検証としても注目されている。

2.3 Feshbach 共鳴

Feshbach 共鳴とは 2 原子の散乱の際に共鳴束縛状態としての分子が形成される現象である [1, 5]。散乱の始、終状態を open channel、中間の分子状態を closed channel と呼ぶ。図 2.1 は原子間相互作用ポテンシャルを表しており、電子間相互作用による近距離のクーロン斥力と van der Waals 力による遠距離の引力により Lennard-Jones 型のポテンシャルとなる。共鳴束縛状態はポテンシャルのくぼみに形成される。さらに超微細構造相互作用、外部磁場によるゼーマン効果、電子と核のボー

ア磁子の大きさの違いが重要である。超微細構造相互作用は電子スピンと核スピンの大きさを片方は $+1$ 、もう片方は -1 変化させる効果を持つ。これにより中間状態には始状態とは異なる原子スピン状態が含まれる。電子のボーア磁子は核のものと比べてはるかに大きいので、外部磁場により始状態と中間状態でエネルギー差が生じる。その結果、中間状態のくぼみにできる共鳴準位のエネルギーは外部磁場に依存するので Feshbach 共鳴は外部磁場で制御することが可能である。

このような2つの channel による相互作用を two-channel model と呼ぶ。本研究では簡単のため、引力相互作用の起源は問わずに有効的な相互作用があるものとする single-channel model で議論を進める。

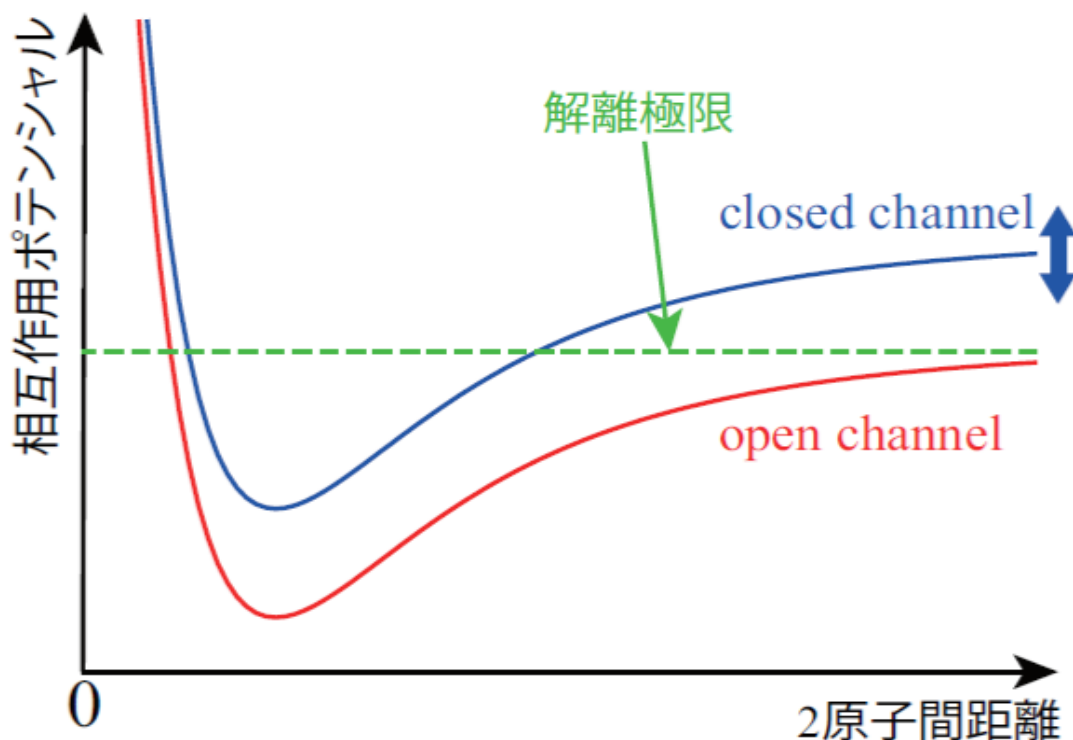


図 2.1: 原子間相互作用の模式図 [5]。

2.4 BCS-BEC クロスオーバー

Feshbach 共鳴により可変に引力相互作用が制御可能となったため、BCS-BEC クロスオーバーが観測できるようになった [1]。この現象はフェルミ原子気体の超流動の性質が金属超伝導で知られる弱い引力相互作用の BCS 理論的なものから、強い引力による分子ボゾンのボーズ・アインシュタイン凝縮 (BEC) へと連続的に移行する現象である。図 2.2 は BCS-BEC クロスオーバーの相図である。横軸の $(k_F a_s)^{-1}$ は引力相互作用の強さを s 波散乱長の逆数で表している。 T^*, T_c はそれぞれ分子対形成温度と超流動転移温度を表す。 $(k_F a_s)^{-1} < -1$ の引力相互作用が弱い BCS 領域では BCS 理論で知られるようにクーパー対形成温度と転移温度がほとんど同じである。引力相互作用を強くしていくと結合エネルギーが上昇し、転移温度も上昇する。 $(k_F a_s)^{-1} > 1$ の引力相互作用が強い BEC 領域では転移温度より高温でクーパー対が形成される。この領域の極限ではクーパー対のサイズが平

均粒子間距離も小さくなるため、クーパー対をボーズ粒子とみなせるので温度を下げたときの超流動転移はボーズ気体の BEC となる。中間領域はクロスオーバー領域と呼ばれ、特に $(k_F a_s)^{-1} = 0$ はユニタリ極限と呼ばれる。

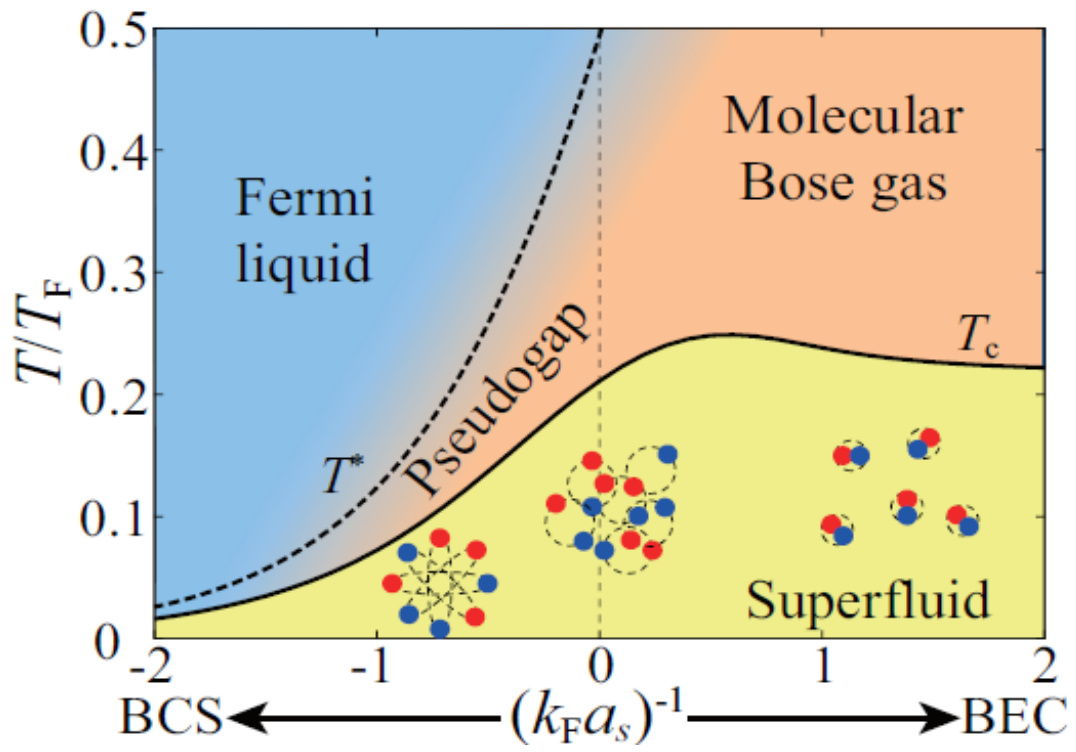


図 2.2: BCS-BEC クロスオーバーの相図 [5]。

第 3 章

クーパー問題

この章では光格子中のフェルミ原子気体のクーパー問題を解く。クーパー問題とはフェルミ面上に 2 つのフェルミ原子を置き、その 2 原子間にのみ引力相互作用が働く系についての問題である [1, 6]。この問題は BCS 理論 [7] の誕生に影響を与えた。

3.1 一様系のクーパー問題

初めに一様系の場合を考える。2 粒子のスピン状態は \uparrow, \downarrow で異なるとする。それぞれの粒子の座標を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ 、質量を m 、引力ポテンシャルを $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ 、系の体積は 1 とする。固有エネルギー E は 2 粒子のフェルミエネルギー $2E_F$ とそこからのずれである束縛エネルギー E_b に分けて $E = E_b + 2E_F$ とする。2 つの粒子がクーパー対を形成するには束縛したときにエネルギーを得しないといけなないので $E < 2E_F$ 、つまり $E_b < 0$ となる必要がある。2 体波動関数 $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ に関するシュレディンガー方程式は次式になる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (E_b + 2E_F)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.1)$$

ここでは波動関数の空間成分を考えている。スピン成分は 2 つのスピンの合成によるシングレットかトリプレットに分類できる。フェルミ粒子の波動関数は全体として反対称にならないといけなないのでスピン成分の対称性を決めると空間成分の対称性が決まる。空間成分は重心運動量を 0、相対運動量を $\hbar\mathbf{k}$ として次のように展開することができる。

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (3.2)$$

フェルミ準位までは粒子が詰まっているのでフェルミ波数 k_F 以下について次の条件を課す。

$$g(|\mathbf{k}| < k_F) = 0 \quad (3.3)$$

(3.2) 式を (3.1) 式に代入すると $g(\mathbf{k})$ に対する方程式が得られる。

$$\frac{\hbar^2 k^2}{m} g(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}' > k_F} V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} g(\mathbf{k}') = (E_b + 2E_F) g(\mathbf{k}) \quad (3.4)$$

$$V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \int d^3\mathbf{r} V(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.5)$$

粒子間の相互作用として接触型の引力相互作用 $V(\mathbf{r}) = -V\delta(\mathbf{r})$ を考える。(3.5) 式より $V_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -V(0) \equiv -V$ となり、(3.4) 式は次のようになる。

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} - 2E_F - E_b\right)g(\mathbf{k}) = V \sum_{\mathbf{k}' > k_F} g(\mathbf{k}') \quad (3.6)$$

スピントリプレットの場合は空間成分 $g(\mathbf{k})$ は反対称になり (3.6) 式の右辺は 0 になる。この場合、空間成分が反対称のため 2 粒子は同じ地点に存在することができず接触型の相互作用が機能しない。従って、スピンシングレットを考える。 $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \equiv \varepsilon_k$ と置くと固有エネルギーを求める方程式は次のようになる。

$$1 = V \sum_{\mathbf{k}' > k_F} \frac{1}{2\varepsilon_k - 2E_F - E_b} \quad (3.7)$$

$E_b < 0$ の解が得られれば、2 体波動関数の固有エネルギーは $2E_F$ より小さくなるので引力相互作用により 2 粒子がエネルギーを得て束縛状態を形成すると考えられる。(3.7) 式の右辺の和はデルタ関数型の接触相互作用を使ったことにより紫外発散して収束しない。これはフェルミエネルギーよりも十分大きいカットオフエネルギー $E_c = \frac{\hbar^2 k_c^2}{2m}$ を導入し回避する。散乱理論 [1, 8] より 2 体の s 波散乱長 a_s で相互作用を表す。

$$\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} = - \frac{V}{1 - V \sum_k^{k_c} \frac{1}{2\varepsilon_k}} \quad (3.8)$$

フェルミ面まで繰り込んだ散乱長を $a_s(E_F)$ とすると次式になる。

$$\frac{4\pi\hbar^2 a_s(E_F)}{m} = - \frac{V}{1 - V \sum_{k > k_F}^{k_c} \frac{1}{2\varepsilon_k}} \quad (3.9)$$

a_s と $a_s(E_F)$ の関係は

$$\frac{4\pi\hbar^2 a_s(E_F)}{m} = - \frac{V}{1 - V \sum_{k > 0}^{k_c} \frac{1}{2\varepsilon_k} + V \sum_{k > 0}^{k_F} \frac{1}{2\varepsilon_k}} = \frac{- \frac{V}{1 - V \sum_{k > 0}^{k_c} \frac{1}{2\varepsilon_k}}}{1 + \frac{V}{1 - V \sum_{k > 0}^{k_c} \frac{1}{2\varepsilon_k}} \sum_{k > 0}^{k_F} \frac{1}{2\varepsilon_k}} = \frac{\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m}}{1 - \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \sum_{k > 0}^{k_F} \frac{1}{2\varepsilon_k}} \quad (3.10)$$

となりこの式はカットオフに依存しない。(3.9) 式より

$$\frac{1}{V} = \sum_{k > k_F}^{k_c} \frac{1}{2\varepsilon_k} - \frac{4\pi\hbar^2 a_s(E_F)}{m} \quad (3.11)$$

を (3.7) 式に代入する。

$$- \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s(E_F)} = \sum_{\mathbf{k}' > k_F}^{k_c} \left[\frac{1}{2\varepsilon_k - 2E_F - E_b} - \frac{1}{2\varepsilon_k} \right] \quad (3.12)$$

(3.10) 式より

$$1 - \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \sum_{\mathbf{k}>0}^{k_F} \frac{1}{2\varepsilon_k} = -\frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \sum_{\mathbf{k}'>k_F}^{k_c} \left[\frac{1}{2\varepsilon_k - 2E_F - E_b} - \frac{1}{2\varepsilon_k} \right]$$

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \sum_{\mathbf{k}>0}^{k_F} \frac{1}{2\varepsilon_k} = - \sum_{\mathbf{k}'>k_F}^{k_c} \left[\frac{1}{2\varepsilon_k - 2E_F - E_b} - \frac{1}{2\varepsilon_k} \right] \quad (3.13)$$

となる。和を積分に置き換えて計算する。この積分は一様系の場合には解析的に計算することができる。

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2} \int d^3k \frac{1}{k^2} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \frac{4\pi}{8\pi^3} \frac{m}{\hbar^2} \int_0^{k_F} dk = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \frac{m}{2\pi^2\hbar^2} k_F \\ (\text{右辺}) &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{k_F}^{k_c} dk k^2 \left[\frac{1}{2\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - 2\frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} - E_b} - \frac{1}{2\frac{\hbar^2 k^2}{2m}} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi^2} \int_{k_F}^{k_c} dk k^2 \frac{m}{\hbar^2} \frac{k^2 - k_F^2 + k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}{(k^2 - k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b) k^2} \\ &= -\frac{m}{2\pi^2\hbar^2} (k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b) \int_{k_F}^{k_c} dk \frac{1}{k^2 - k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b} \end{aligned}$$

ここで次の積分公式を使う。

$$\int \frac{dx}{x^2 + c} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{c}} \arctan \frac{x}{\sqrt{c}} & (c > 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{|c|}} \log \left| \frac{x - \sqrt{|c|}}{x + \sqrt{|c|}} \right| & (c < 0) \end{cases}$$

$(-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b) > 0$ 、つまり $-\frac{m}{\hbar^2} E_b > k_F^2$ の時

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -\frac{m}{2\pi^2\hbar^2} (k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b) \left[\frac{1}{\sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \arctan \frac{k}{\sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right]_{k_F}^{k_c} \\ &= \frac{m}{2\pi^2\hbar^2} \sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b} \left(\arctan \frac{k_c}{\sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b}} - \arctan \frac{k_F}{\sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right) \end{aligned}$$

$(-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b) < 0$ 、つまり $-\frac{m}{\hbar^2} E_b < k_F^2$ の時

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= -\frac{m}{2\pi^2\hbar^2} (k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b) \left[\frac{1}{2\sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \log \left| \frac{k - \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}}{k + \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right| \right]_{k_F}^{k_c} \\ &= -\frac{m}{4\pi^2\hbar^2} \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b} \left(\log \left| \frac{k_c - \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}}{k_c + \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right| - \log \left| \frac{k_F - \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}}{k_F + \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right| \right) \end{aligned}$$

まとめると

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \frac{m}{2\pi^2\hbar^2} k_F = \begin{cases} \frac{m}{2\pi^2\hbar^2} \sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b} \left(\arctan \frac{k_c}{\sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b}} - \arctan \frac{k_F}{\sqrt{-k_F^2 - \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right) & (-\frac{m}{\hbar^2} E_b > k_F^2) \\ -\frac{m}{4\pi^2\hbar^2} \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b} \left(\log \left| \frac{k_c - \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}}{k_c + \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right| - \log \left| \frac{k_F - \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}}{k_F + \sqrt{k_F^2 + \frac{m}{\hbar^2} E_b}} \right| \right) & (-\frac{m}{\hbar^2} E_b < k_F^2) \end{cases} \quad (3.14)$$

となる。

3.2 光格子中の粒子のエネルギー分散

光格子中のクーパー問題を考えるためにまずは1粒子のエネルギー分散を求める。(2.1)式の周期ポテンシャル中の1粒子のシュレディンガー方程式は固有エネルギーを E_{lat} として次式になる。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E_{\text{lat}} \psi(\mathbf{r}) \quad (3.15)$$

$$V(\mathbf{r}) = sE_R(\sin^2 q_x x + \sin^2 q_y y + \sin^2 q_z z) = V(x) + V(y) + V(z) \quad (3.16)$$

$$V(x) = sE_R \sin^2 q_x x$$

周期ポテンシャルはそれぞれの空間成分の和になっているので(3.15)式は変数分離することができる。x成分に対する式は次式になる。

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + sE_R \sin^2 q_x x \right) \psi(x) = E_x \psi(x) \quad (3.17)$$

y, z成分も同様にするとエネルギーはそれぞれの和になる。

$$E_{\text{lat}} = E_x + E_y + E_z \quad (3.18)$$

(3.17)式を解き E_x を求める。波動関数を平面波展開する。

$$\psi(x) = \sum_{k_x} C_{k_x} e^{ik_x x} \quad (3.19)$$

周期ポテンシャルは格子定数 a の逆格子ベクトル $\mathbf{G} = g(m_1, m_2, m_3)$ (m_i は整数), $g = 2\pi/a$ を用いて

$$V(x) = \sum_{m_1} V_{m_1} e^{igm_1 x} \quad (3.20)$$

と展開でき、(3.19),(3.20)式を(3.17)式に代入する。

$$\sum_{k_x} \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} C_{k_x} e^{ik_x x} + \sum_{k_x, m_1} V_{m_1} C_{k_x} e^{i(gm_1 + k_x)x} = E_x \sum_{k_x} C_{k_x} e^{ik_x x}$$

$k'_x = k_x + gm_1$ とおく。

$$\sum_{k_x} \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} C_{k_x} e^{ik_x x} + \sum_{k'_x, m_1} V_{m_1} C_{k'_x - gm_1} e^{ik'_x x} = E_x \sum_{k_x} C_{k_x} e^{ik_x x}$$

ある k_x に対して次式が得られる。

$$\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} C_{k_x} + \sum_{m_1} V_{m_1} C_{k_x - gm_1} = E_x C_{k_x} \quad (3.21)$$

m_1 についての和を実行するために V_{m_1} を計算する。 $q_x = n\pi/a$ (n は整数) とする。

$$\begin{aligned}
V_{m_1} &= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx V(x) e^{-igm_1 x} \\
&= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} dx s E_R \sin^2(qx) e^{-igm_1 x} \\
&= \frac{s E_R}{2} \int_{-1}^1 dX \sin^2\left(\frac{n\pi X}{2}\right) e^{-im_1 \pi X} \left(\frac{2x}{a} = X\right) \\
&= \frac{s E_R}{2} \int_{-1}^1 dX \frac{1 - \cos(n\pi X)}{2} e^{-im_1 \pi X} \\
&= \frac{s E_R}{4} \int_{-1}^1 dX [e^{-im_1 \pi X} - \cos(n\pi X) e^{-im_1 \pi X}] \\
&= \frac{s E_R}{4} \left[\delta_{m_1,0} X - \frac{1}{im_1 \pi} e^{-im_1 \pi X} \right]_{-1}^1 - \frac{s E_R}{4} \int_{-1}^1 dX (\cos(n\pi x) \cos(m_1 \pi x) - i \cos(n\pi x) \sin(m_1 \pi x)) \\
&= \frac{s E_R}{4} 2\delta_{m_1,0} - \frac{s E_R}{4} \delta_{m_1,n} \\
&= \frac{s E_R}{4} (2\delta_{m_1,0} - \delta_{m_1,n})
\end{aligned} \tag{3.22}$$

この式を (3.21) 式に代入する。ほとんど自由な電子近似 [9] を使い最近接の逆格子の寄与だけを考慮して $n, m = \pm 1$ とする。

$$\begin{aligned}
\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} C_{k_x} + \frac{s E_R}{4} (2C_{k_x} - C_{k_x-g} - C_{k_x+g}) &= E_x C_{k_x} \\
\left(\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \frac{s E_R}{2} - E_x \right) C_{k_x} - \frac{s E_R}{4} (C_{k_x-g} + C_{k_x+g}) &= 0
\end{aligned} \tag{3.23}$$

ブラッグ条件よりこの式から次の 2 式が得られる。

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x \right) C_{k_x} - \frac{s E_R}{4} C_{k_x-g} = 0 \tag{3.24}$$

$$\left(\frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x \right) C_{k_x-g} - \frac{s E_R}{4} C_{k_x} = 0 \tag{3.25}$$

この連立方程式を行列で表す。

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x & -\frac{s E_R}{4} \\ -\frac{s E_R}{4} & \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k_x} \\ C_{k_x-g} \end{pmatrix} = 0 \tag{3.26}$$

連立方程式が非自明な解を持つ条件より

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x & -\frac{s E_R}{4} \\ -\frac{s E_R}{4} & \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x \end{vmatrix} = 0 \\
&\left(\frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x \right) \left(\frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + \frac{s E_R}{2} - E_x \right) - \frac{s^2 E_R^2}{16} = 0 \\
&E_x^2 - \left(\frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + s E_R \right) E_x + \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + \frac{s E_R}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 \right) + \frac{3s^2 E_R^2}{16} = 0
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$B = \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + sE_R$$

$$C = \frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 + \frac{sE_R}{2} \left(\frac{\hbar^2}{2m} k_x^2 + \frac{\hbar^2}{2m} (k_x - g)^2 \right) + \frac{3s^2 E_R^2}{16}$$

と置くと

$$E_x^2 - BE_x + C = 0$$

となり、固有エネルギーは

$$E_x(k_x) = \frac{B}{2} \pm \frac{B^2 - 4C}{2} \quad (3.27)$$

となる。±は k_x が第一ブリルアンゾーン内の場合−、外の場合+となる。 $g = 2q_x$ より $k_F/q_x = 1$ とすると第一ブリルアンゾーンの端は $k_x/k_F = \pm 1$ となり、 $E_x(k_x)$ は図3.1のようなバンド構造となる。

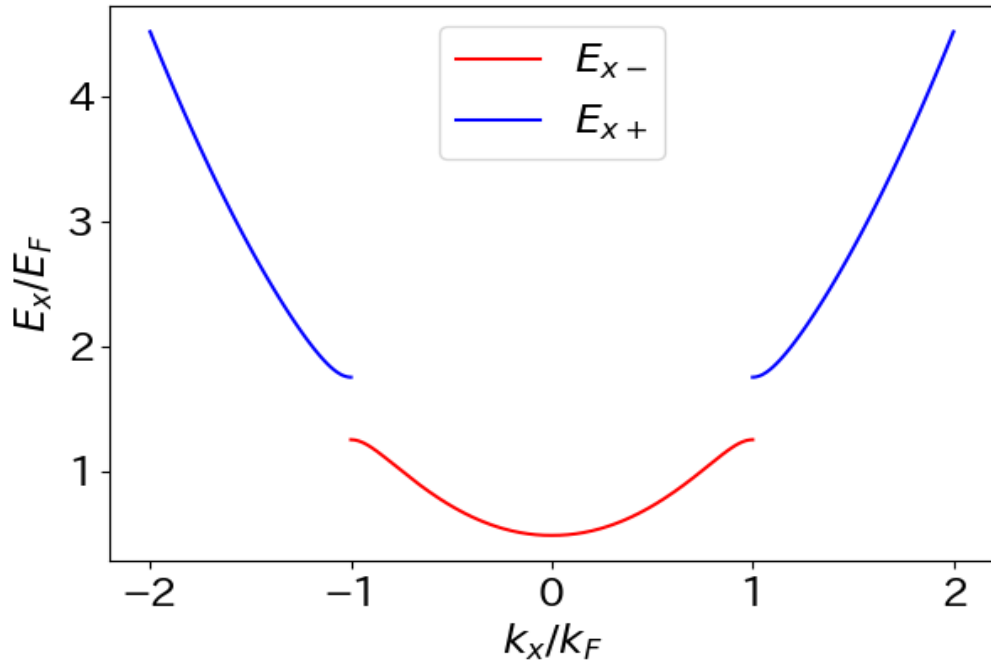


図 3.1: 光格子中の 1 粒子のエネルギー分散。

3.3 光格子中のクーパー問題

(3.1) 式のシュレディンガー方程式に光格子による周期ポテンシャル (3.16) 式を加える。

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 + \nabla_2^2) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_1) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_2) \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (E_b + 2E_F) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.28)$$

(3.15) 式より次のように書ける。

$$[2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}) + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = (E_b + 2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}_F)) \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (3.29)$$

ここで光格子中の粒子のフェルミエネルギーは $E_{\text{lat}}(\mathbf{k}_F)$ となる。3.1 章と同様に計算すると (3.29) 式の固有エネルギーを求める方程式は (3.13) 式より次式になる。

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \sum_{\mathbf{k} > 0} \frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k})} = - \sum_{\mathbf{k}' > \mathbf{k}_F}^{k_c} \left[\frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}) - 2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}_F) - E_b} - \frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k})} \right] \quad (3.30)$$

3.4 数値計算

最初に一様系を考える。数値計算をするために (3.14) 式を無次元化する。(3.14) 式の両辺を $\frac{mk_F}{4\pi^2\hbar^2}$ で割る。

$$\frac{\pi}{k_F a_s} - 2 = \begin{cases} 2\sqrt{-1 - \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}} \left(\arctan \frac{k_c/k_F}{\sqrt{-1 - \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}}} - \arctan \frac{1}{\sqrt{-1 - \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}}} \right) & (\frac{E_b}{E_F} < -2) \\ -\sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}} \left(\log \left| \frac{k_c/k_F - \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}}}{k_c/k_F + \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}}} \right| - \log \left| \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{2}\frac{E_b}{E_F}}} \right| \right) & (0 > \frac{E_b}{E_F} > -2) \end{cases} \quad (3.31)$$

この式より数値的に E_b/E_F を求めることができる。

光格子がある場合は (3.30) 式の和を積分に置き換えて無次元化する。積分範囲として k の負の領域もあるが被積分関数の中の $E_{\text{lat}}(\mathbf{k})$ は偶関数なので正の領域のみ実行すればよい。従って、(3.30) 式は次式になる。

$$\begin{aligned} \frac{m}{4\pi\hbar^2 a_s} - \frac{1}{8\pi^3} 8 \int \int \int_0^{k_F} dk_x dk_y dk_z \frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k})} \\ = -\frac{1}{8\pi^3} 8 \int \int \int_{k_F}^{k_c} dk_x dk_y dk_z \left[\frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}) - 2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}_F) - E_b} - \frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k})} \right] \end{aligned}$$

両辺に $E_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$ をかける。

$$\begin{aligned} \frac{k_F^2}{8a_s} - \frac{1}{2\pi^2} \int \int \int_0^{k_F} dk_x dk_y dk_z \frac{1}{E_{\text{lat}}(\mathbf{k})/E_F} \\ = -\frac{1}{\pi^2} \int \int \int_{k_F}^{k_c} dk_x dk_y dk_z \left[\frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k})/E_F - 2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}_F)/E_F - E_b/E_F} - \frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k})/E_F} \right] \end{aligned}$$

無次元量として $k'_i = k_i/k_F$ ($i = x, y, z$) と置く。

$$\begin{aligned} \frac{k_F^2}{8a_s} - \frac{1}{2\pi^2} k_F^3 \int \int \int_0^1 dk'_x dk'_y dk'_z \frac{1}{E_{\text{lat}}(\mathbf{k}')/E_F} \\ = -\frac{1}{\pi^2} \int \int \int_1^{k_c/k_F} dk'_x dk'_y dk'_z \left[\frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}')/E_F - 2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}_F)/E_F - E_b/E_F} - \frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}')/E_F} \right] \\ \frac{\pi^2}{8k_F a_s} - \frac{1}{2} \int \int \int_0^1 dk'_x dk'_y dk'_z \frac{1}{E_{\text{lat}}(\mathbf{k}')/E_F} \\ = - \int \int \int_1^{k_c/k_F} dk'_x dk'_y dk'_z \left[\frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}')/E_F - 2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}_F)/E_F - E_b/E_F} - \frac{1}{2E_{\text{lat}}(\mathbf{k}')/E_F} \right] \end{aligned} \quad (3.32)$$

積分はモンテカルロ積分 [A] で実行して E_b/E_F を数値的に求める。

3.5 結果

(3.31)、(3.32) 式よりの束縛エネルギー E_b/E_F の散乱長の逆数 $(k_F a_s)^{-1}$ 依存性は図 3.2 のようになる。それぞれのグラフはレーザーの強度 s を変化させたときの結果である。 s を変化させることは光格子の深さを変化させることに対応している。 $s = 0$ は一様系の場合の結果である。 s の大きさに関わらず、 $(k_F a_s)^{-1}$ が BCS 領域から BEC 領域に変化するに従って、束縛エネルギーは負に増加していく。これは粒子間の引力相互作用が強くなるからであると考えられる。 $(k_F a_s)^{-1}$ が負の BCS 領域では E_b/E_F は 0 に漸近していくが常に $E_b/E_F < 0$ となるのでフェルミ原子は束縛した方がエネルギーを得ることがわかる。 s が大きくなるほど E_b/E_F は負に大きくなっている。これは原子が光格子のトラップからも束縛を感じるためであると考えられる。以上より、フェルミ原子は光格子中でもクーパー対を形成し、周期ポテンシャルの深さが深いほど束縛エネルギーが大きくなる。

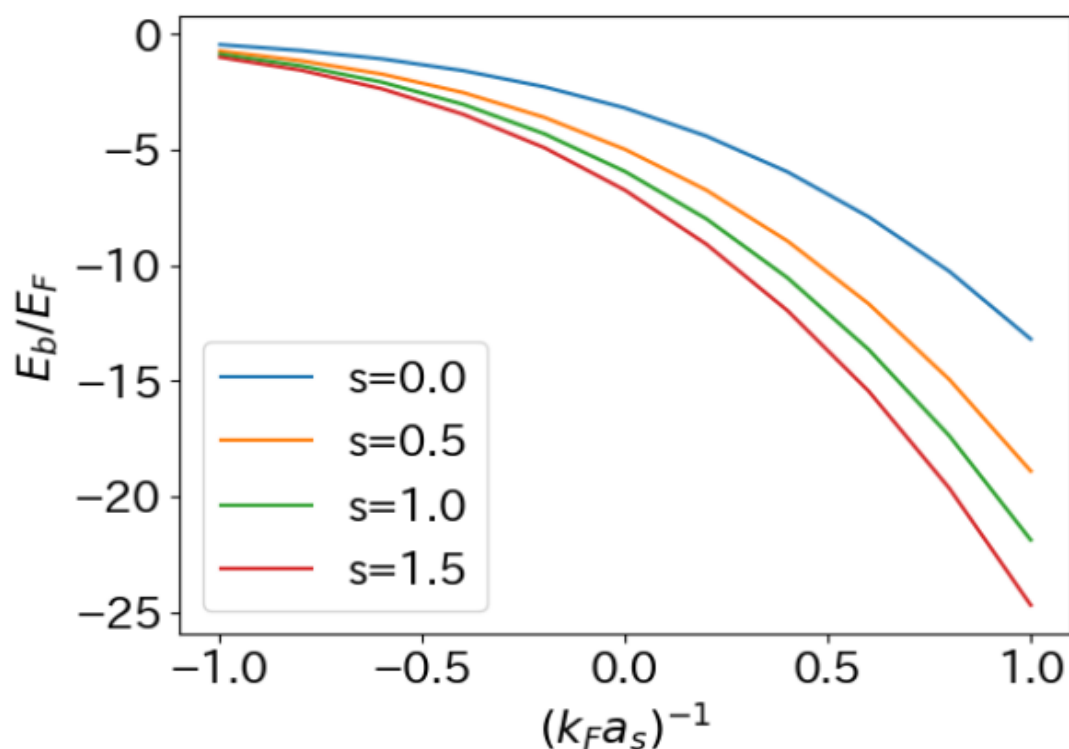


図 3.2: 束縛エネルギーの散乱長依存性。

第 4 章

BCS-BEC クロスオーバー

この章では Bogoliubov-de Gennes(BdG) 方程式を用いて BCS-BEC クロスオーバー領域の光格子中のフェルミ原子気体を数値的に解析する。

4.1 BdG 方程式の導出

BCS ハミルトニアンから BdG 方程式を導出する [10]。BCS ハミルトニアンはグランドカノニカルハミルトニアンであり次式で与えられる。

$$H = \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \psi_{\sigma}^{\dagger}(\mathbf{r}) L(\mathbf{r}) \psi_{\sigma}(\mathbf{r}) + g \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right] \quad (4.1)$$

$$L(\mathbf{r}) \equiv -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu$$

$\psi(\mathbf{r})$ はフェルミオンの場の演算子、 g は結合定数である。(4.1) 式の第 2 項を平均場近似する。その時に

$$\Delta(\mathbf{r}) = -g \langle \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \rangle \quad (4.2)$$

の平均場を考え、Hartree 項、Fock 項、定数項は無視する。(4.1) 式の第 2 項は

$$\int d\mathbf{r} \left[\Delta(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) + \Delta^*(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \right]$$

となる。場の演算子を Bogoliubov 変換する。

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\gamma_{\mathbf{k}\uparrow} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \gamma_{\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \right) \\ \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}) &= \sum_{\mathbf{k}} \left(\gamma_{\mathbf{k}\downarrow} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \gamma_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\gamma_{\mathbf{k}}$ はフェルミ原子の準粒子の演算子で次の反交換関係を満たす。

$$\{\gamma_{\mathbf{k}\sigma} \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = 0, \quad \{\gamma_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \quad (4.4)$$

また、 $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ は完全性を満たす。

$$\sum_{\mathbf{k}} [u_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}') + v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')] = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.5)$$

Bogoliubov 変換により (4.1) 式は次のように対角化される。

$$H = \sum_{\mathbf{k}\sigma} E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}\sigma} + E_g \quad (4.6)$$

$E_{\mathbf{k}}$ は準粒子のエネルギー、 E_g はグランドカノニカルの基底状態のエネルギーである。この式より

$$[H, \gamma_{\mathbf{k}\sigma}] = -E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}, \quad [H, \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger] = E_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \quad (4.7)$$

となる。また、場の演算子と BCS ハミルトニアンとの交換関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} [\psi_\uparrow(\mathbf{r}), H] &= L(\mathbf{r})\psi_\uparrow(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r})\psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \\ [\gamma_{\mathbf{k}\uparrow} u_{\mathbf{k}}, H] - [\gamma_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*, H] &= (L(\mathbf{r})u_{\mathbf{k}} + \Delta(\mathbf{r})v_{\mathbf{k}})\gamma_{\mathbf{k}\uparrow} + (-L(\mathbf{r})v_{\mathbf{k}}^* + \Delta(\mathbf{r})u_{\mathbf{k}}^*)\gamma_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.7)、(4.8) 式より $\gamma_{\mathbf{k}\sigma}$ の係数を比較すると次の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned} L(\mathbf{r})u_{\mathbf{k}} + \Delta(\mathbf{r})v_{\mathbf{k}} &= E_{\mathbf{k}}u_{\mathbf{k}} \\ -L(\mathbf{r})v_{\mathbf{k}}^* + \Delta(\mathbf{r})u_{\mathbf{k}}^* &= E_{\mathbf{k}}v_{\mathbf{k}}^* \end{aligned} \quad (4.9)$$

2 番目の式の複素共役をとると次式が得られる。

$$\begin{pmatrix} L(\mathbf{r}) & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -L(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \\ v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

この式を Bogoliubov-de Gennes 方程式と呼ぶ。

準粒子の演算子の期待値は次のようになる。

$$\langle \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'} \rangle = f(E_{\mathbf{k}}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad \langle \gamma_{\mathbf{k}\sigma} \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'} \rangle = \langle \gamma_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger \rangle = 0 \quad (4.11)$$

$f(E_{\mathbf{k}})$ はフェルミ分布関数である。Bogoliubov 変換により (4.2) 式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}) &= -g \left\langle \sum_{\mathbf{k}} \left(\gamma_{\mathbf{k}\uparrow} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) - \gamma_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \right) \sum_{\mathbf{k}'} \left(\gamma_{\mathbf{k}'\downarrow} u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) + \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger v_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \right) \right\rangle \\ &= -g \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \gamma_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger - u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \gamma_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'\downarrow} \rangle \\ &= -g \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} [u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (1 - f(E_{\mathbf{k}})) - u_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} f(E_{\mathbf{k}})] \\ &= -g \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) (1 - 2f(E_{\mathbf{k}})) \end{aligned} \quad (4.12)$$

粒子数密度は同様に計算して次式になる。

$$\begin{aligned} n_\uparrow(\mathbf{r}) &= \langle \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} [|u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 f(E_{\mathbf{k}}) + |v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 (1 - f(E_{\mathbf{k}}))] \\ n_\downarrow(\mathbf{r}) &= \langle \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \psi_\downarrow(\mathbf{r}) \rangle = \sum_{\mathbf{k}} [|u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 f(E_{\mathbf{k}}) + |v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 (1 - f(E_{\mathbf{k}}))] \\ n(\mathbf{r}) &= 2 \sum_{\mathbf{k}} [|u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 f(E_{\mathbf{k}}) + |v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 (1 - f(E_{\mathbf{k}}))] \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2 モデル

$V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ は z 方向の 1 次元の光格子の周期ポテンシャルとする。

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = V_{\text{ext}}(z) = sE_R \sin^2(qz) \quad (4.14)$$

ここで格子定数を $d = \pi/q$ とする。

温度を $T = 0$ とすると、(4.12)、(4.13) 式よりギャップ方程式と粒子数方程式は次式になる。

$$\Delta(\mathbf{r}) = -g \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \quad (4.15)$$

$$N = 2 \sum_{\mathbf{k}} \int |v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \quad (4.16)$$

平均粒子数密度は系の体積を V として次式になる。

$$n = \frac{2}{V} \sum_i \int |v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \quad (4.17)$$

周期ポテンシャルにより $u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ は z 方向に周期 d をもつ $\tilde{u}_{\mathbf{k}}(z), \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z)$ で表すことができる [11, 12]。準粒子の運動量を P 、波数を Q とする。

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \tilde{u}_{\mathbf{k}}(z) e^{iQz} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z) e^{iQz} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.18)$$

これらを (4.10) 式に代入すると

$$\begin{pmatrix} \tilde{H}_Q(z) & \tilde{\Delta}(z) \\ \tilde{\Delta}^*(z) & -\tilde{H}_{-Q}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{k}}(z) \\ \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z) \end{pmatrix} = E_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \tilde{u}_{\mathbf{k}}(z) \\ \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$\tilde{H}_Q(z) \equiv -\frac{\hbar^2}{2m} \left[-k_x^2 - k_y^2 + \frac{d^2}{dz^2} + 2i(k_z + Q) \frac{d}{dz} - (k_z + Q)^2 \right] + sE_R \sin^2(qz) - \mu \quad (4.20)$$

粒子間の相互作用は 3 章と同様に接触型の引力相互作用を用いる。(4.15) 式の和は紫外発散して収束しない。それを回避するために [13, 14] の方法でエネルギーカットオフと s 波散乱長を用いて繰り込みをする。

$$\Delta(\mathbf{r}) = -g_{\text{eff}}(\mathbf{r}) \sum_{E_{\mathbf{k}} \leq E_c} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) v_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

$$\frac{1}{g_{\text{eff}}(\mathbf{r})} = \frac{1}{g} - \frac{mk_c(\mathbf{r})}{2\pi^2\hbar^2} \left[1 - \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_c(\mathbf{r})} \ln \frac{k_c(\mathbf{r}) + k_F(\mathbf{r})}{k_c(\mathbf{r}) - k_F(\mathbf{r})} \right] \quad (4.22)$$

ここで $g = 4\pi\hbar^2 a_s/m$ である。 E_c はカットオフエネルギーでありフェルミエネルギーに比べて充分大きい必要がある。また、 $k_F(\mathbf{r}), k_c(\mathbf{r})$ は局所密度近似を用いて得られる局所的なフェルミ波数とカットオフ波数であり次式で与えられる。

$$E_c = \frac{\hbar^2 k_c^2(\mathbf{r})}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) - \mu \quad (4.23)$$

$$\mu = \frac{\hbar^2 k_F^2(\mathbf{r})}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \quad (4.24)$$

局所粒子数密度は次のようになる。

$$n(z) = 2 \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}_{\mathbf{k}}(z)|^2 \quad (4.25)$$

4.3 数値計算

4.3.1 数値計算の手順

(4.19)、(4.21) 式より BdG 方程式は自己無撞着に解くことができる。数値計算はつぎのような手順で行う [11, 12, 15, 16]。

1. $\tilde{\Delta}(z)$ と μ と平均粒子数密度の初期値 n_0 を決め (4.19) 式に代入する。
2. 固有値 $E_{\mathbf{k}}$ を求める。
3. 固有ベクトル $\tilde{u}_{\mathbf{k}}(z), \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z)$ を求め (4.5) 式を用い規格化する。
4. 求めた固有ベクトルを (4.21)、(4.25)、(4.17) 式に代入し $\tilde{\Delta}(z)$ 、 $n(z)$ 、 n を求める。
5. 求めた n が初期値と一致すれば計算を終了する。
6. 一致しなければ n が保存するように化学ポテンシャル μ を $\mu = \mu(n_0/n)^\eta$ に更新する。ここで η は 1/2 や 1/3 など計算の収束度合いで任意に決める。
7. 4 で求めた $\tilde{\Delta}(z)$ と 6 で更新した μ を (4.19) 式に代入する。
8. 2 に戻る。

4.3.2 数値計算の準備

これ以降は簡単のため $Q = 0$ とする。 $\tilde{u}_{\mathbf{k}}(z), \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z)$ は周期的なので $\tilde{\Delta}(z)$ も周期的になると考えられる。3.2 章と同様に逆格子を用いて展開する。ここで t, m は整数である。

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{\mathbf{k}}(z) &= \sum_t u_{k_z+2qt} e^{i2qtz} \\
 \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z) &= \sum_t v_{k_z+2qt} e^{i2qtz} \\
 V_{\text{ext}}(z) &= \sum_m V_m e^{i2qmz} \\
 \tilde{\Delta}(z) &= \sum_m \Delta_m e^{i2qmz}
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

これらを (4.19) 式に代入すると $E_{\mathbf{k}} \tilde{u}_{\mathbf{k}}(z)$ に関する式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \sum_t \left[\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + (k_z + 2qt)^2) - \mu \right] u_{k_z+2qt} e^{i2qtz} &+ \sum_{t,m} V_m u_{k_z+2qt} e^{i2q(t+m)z} \\
 &+ \sum_{t,m} \Delta_m v_{k_z+2qt} e^{i2q(t+m)z} = E_{\mathbf{k}} \sum_t u_{k_z+2qt} e^{i2qtz}
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

$t + m = t'$ とおくと V_m, Δ_m に関する式は

$$\sum_{t,m} (V_m u_{k_z+2qt} + \Delta_m v_{k_z+2qt}) e^{i2q(t+m)z} = \sum_{t',m} (V_m u_{k_z+2q(t'-m)} + \Delta_m v_{k_z+2q(t'-m)}) e^{i2qt'z}$$

となるので (4.19) 式は (4.27) 式より次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \sum_t \left\{ \left[\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + (k_z + 2qt)^2) - \mu \right] u_{k_z+2qt} + \sum_m V_m u_{k_z+2q(t-m)} + \sum_m \Delta_m v_{k_z+2q(t-m)} \right\} \\
&= E_{\mathbf{k}} \sum_t u_{k_z+2qt} \\
& \sum_t \left\{ - \left[\frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + (k_z + 2qt)^2) - \mu \right] v_{k_z+2qt} - \sum_m V_m v_{k_z+2q(t-m)} + \sum_m \Delta_m^* u_{k_z+2q(t+m)} \right\} \\
&= E_{\mathbf{k}} \sum_t v_{k_z+2qt}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

ここで

$$H_t \equiv \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2 + (k_z + 2qt)^2) - \mu$$

と置き、(4.28) 式を行列で表す。

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & H_1 + V_0 & V_1 & V_2 & \cdots & \Delta_0 & \Delta_1 & \Delta_2 & \cdots \\ \cdots & V_{-1} & H_0 + V_0 & V_1 & \cdots & \Delta_{-1} & \Delta_0 & \Delta_1 & \cdots \\ \cdots & V_{-2} & V_{-1} & H_{-1} + V_0 & \cdots & \Delta_{-2} & \Delta_{-1} & \Delta_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \Delta_0^* & \Delta_{-1}^* & \Delta_{-2}^* & \cdots & -H_1 - V_0 & -V_1 & -V_2 & \cdots \\ \cdots & \Delta_1^* & \Delta_0^* & \Delta_{-1}^* & \cdots & -V_{-1} & -H_0 - V_0 & -V_1 & \cdots \\ \cdots & \Delta_2^* & \Delta_1^* & \Delta_0^* & \cdots & -V_{-2} & -V_{-1} & -H_{-1} - V_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_{k_z+2q} \\ u_{k_z} \\ u_{k_z-2q} \\ \vdots \\ v_{k_z+2q} \\ v_{k_z} \\ v_{k_z-2q} \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= E_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \vdots \\ u_{k_z+2q} \\ u_{k_z} \\ u_{k_z-2q} \\ \vdots \\ v_{k_z+2q} \\ v_{k_z} \\ v_{k_z-2q} \\ \vdots \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

この式の固有ベクトルから (4.26) 式の $\tilde{u}_{\mathbf{k}}(z), \tilde{v}_{\mathbf{k}}(z)$ を求める。

数値計算のために物理量の無次元化をする。(4.22) 式より

$$\begin{aligned}
\frac{g_{\text{eff}}(\mathbf{r})}{E_F} &= \frac{2\pi^2\hbar^2}{m} \frac{1}{E_F} \left[\frac{\pi}{2a_s} - k_c(\mathbf{r}) \left(1 - \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_c(\mathbf{r})} \ln \frac{k_c(\mathbf{r}) + k_F(\mathbf{r})}{k_c(\mathbf{r}) - k_F(\mathbf{r})} \right) \right]^{-1} \\
&= \frac{4\pi^2}{k_F^2} \left[\frac{\pi}{2a_s} - k_c(\mathbf{r}) + \frac{k_F(\mathbf{r})}{2} \ln \frac{k_c(\mathbf{r}) + k_F(\mathbf{r})}{k_c(\mathbf{r}) - k_F(\mathbf{r})} \right]^{-1} \\
&= \frac{4\pi^2}{k_F^3} \left[\frac{\pi}{2k_F a_s} - \frac{k_c(\mathbf{r})}{k_F} + \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_F} \ln \frac{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) + 1}{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) - 1} \right]^{-1} \\
\frac{k_c(\mathbf{r})}{k_F} &= \left[\frac{E_c}{E_F} - \frac{V_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{E_F} + \frac{\mu}{E_F} \right]^{1/2} \\
\frac{k_F(\mathbf{r})}{k_F} &= \left[\frac{\mu}{E_F} - \frac{V_{\text{ext}}(\mathbf{r})}{E_F} \right]^{1/2}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

となるのでギャップは (4.21) 式より次式になる。

$$\frac{\Delta(z)}{E_F} = -\frac{4\pi^2}{k_F^3} \left[\frac{\pi}{2k_F a_s} - \frac{k_c(\mathbf{r})}{k_F} + \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_F} \ln \frac{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) + 1}{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) - 1} \right]^{-1} \sum_{E_{\mathbf{k}} \leq E_c} \tilde{u}_{\mathbf{k}}(z) \tilde{v}_{\mathbf{k}}^*(z)$$

(4.29) 式の固有エネルギー $E_{\mathbf{k}}$ は量子数を t とするバンド構造 $E_t(k_z)$ を持つので k_z の範囲は第一ブリリユアンゾーン内をとればよい。右辺の和は $E_{\mathbf{k}} \leq E_c$ となるバンドまでの和とする。系の体積は整数 M を用いて $L_x = L_y = L_z = Md$ とすると、 $V = L_x L_y L_z = (Md)^3$ となる。 u, v の積は体積の逆数の次元を持つので V をかけて無次元化して $\tilde{u}'_{\mathbf{k}}(z) = \sqrt{V} \tilde{u}_{\mathbf{k}}(z)$, $\tilde{v}'_{\mathbf{k}}(z) = \sqrt{V} \tilde{v}_{\mathbf{k}}^*(z)$ と置く。

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta(z)}{E_F} &= -\frac{4\pi^2}{k_F^3 V} \left[\frac{\pi}{2k_F a_s} - \frac{k_c(\mathbf{r})}{k_F} + \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_F} \ln \frac{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) + 1}{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) - 1} \right]^{-1} \sum_{E_{\mathbf{k}} \leq E_c} \tilde{u}'_{\mathbf{k}}(z) \tilde{v}'_{\mathbf{k}}^*(z) \\
&= -\frac{4\pi^2}{M^3 k_F^3 d^3} \left[\frac{\pi}{2k_F a_s} - \frac{k_c(\mathbf{r})}{k_F} + \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_F} \ln \frac{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) + 1}{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) - 1} \right]^{-1} \sum_{E_{\mathbf{k}} \leq E_c} \tilde{u}'_{\mathbf{k}}(z) \tilde{v}'_{\mathbf{k}}^*(z) \\
&= -\frac{4}{\pi M^3} \left(\frac{q}{k_F} \right)^3 \left[\frac{\pi}{2k_F a_s} - \frac{k_c(\mathbf{r})}{k_F} + \frac{k_F(\mathbf{r})}{2k_F} \ln \frac{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) + 1}{k_c(\mathbf{r})/k_F(\mathbf{r}) - 1} \right]^{-1} \sum_{E_{\mathbf{k}} \leq E_c} \tilde{u}'_{\mathbf{k}}(z) \tilde{v}'_{\mathbf{k}}^*(z)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

粒子数方程式は (4.16) 式より次式になる。

$$\begin{aligned}
N &= 2 \sum_{\mathbf{k}} \int |v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} \\
&= 2 \int dx dy \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}_{\mathbf{k}}(z)|^2 dz \\
&= 2L_x L_y \int_{-L_z/2}^{L_z/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}_{\mathbf{k}}(z)|^2 dz
\end{aligned}$$

$z' = z/d$ と置く。

$$N = 2L_x L_y d \int_{-L_z/2d}^{L_z/2d} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}_{\mathbf{k}}(z')|^2 dz'$$

$v_{\mathbf{k}}(z)$ は周期 d の周期関数なので積分は1周期分だけ実行してその結果を M 倍すればよい。

$$\begin{aligned} N &= 2L_x L_y M d \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}_{\mathbf{k}}(z')|^2 dz' \\ &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}'_{\mathbf{k}}(z')|^2 dz' \end{aligned} \quad (4.32)$$

本研究では平均粒子数密度の初期値を一様系の場合の密度 $n_0 = k_F^3/3\pi^2$ とする。

$$\begin{aligned} \frac{k_F^3}{3\pi^2} V &= 2 \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}'_{\mathbf{k}}(z')|^2 dz' \\ 1 &= \frac{6\pi^2}{M^3} \frac{1}{d^3 k_F^3} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}'_{\mathbf{k}}(z')|^2 dz' \\ &= \frac{6}{\pi M^3} \left(\frac{E_R}{E_F} \right)^{3/2} \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}'_{\mathbf{k}}(z')|^2 dz' \end{aligned} \quad (4.33)$$

局所粒子数密度は (4.25) 式より次式になる。

$$\frac{n(z)}{n} = \frac{\sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}_{\mathbf{k}}(z')|^2}{\int_{-1/2}^{1/2} \sum_{\mathbf{k}} |\tilde{v}_{\mathbf{k}}(z')|^2 dz'} \quad (4.34)$$

数値計算において、波数の和は系の境界条件を周期的境界条件として離散的な波数の和を計算する。系の体積 $V = L_x L_y L_z = (Md)^3$ より整数 n_x, n_y, n_z を用いて波数のとる値は

$$(k_x, k_y, k_z) = \left(\frac{2\pi n_x}{L_x}, \frac{2\pi n_y}{L_y}, \frac{2\pi n_z}{L_z} \right) = \frac{2\pi}{Md} (n_x, n_y, n_z)$$

となる。ここで $n_x, n_y = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ となるが k_z は第一ブリリユアンゾーン内をとるので $n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M/2$ となる。

4.4 結果

散乱長の逆数 $(k_F a_s)^{-1}$ 、フェルミエネルギーとリコイルエネルギーの比 E_F/E_R を変化させたときの局所粒子数密度 $n(z/d)/n$ とギャップ $|\Delta(z/d)|/E_F$ の空間依存性を数値計算により求める。ここで、 E_F/E_R の減少はレーザーのリコイルエネルギーの増加を表す。つまり、光格子の深さが深くなることに対応する。結果は周期ポテンシャル 1 周期分 d の範囲について示す。系の体積は $M = 10$ として $V = 10^3 d^3$ とする。カットオフエネルギー E_c は次の表の値とする。クーパー問題より、引力相互作用が強く、光格子が深くなると束縛エネルギーが増加することを示した。そのため、BdG 方程式でより大きい固有エネルギーの寄与を考慮する必要があり、数値計算においてカットオフエネルギーを大きくする。バンドの数は $E_F/E_R = 0.5, 1$ のときは 18、 $E_F/E_R = 2.5$ のときは 22 として $E_k \leq E_c$ となる範囲の和をとる。

E_c/E_F	$E_F/E_R = 0.5$	$E_F/E_R = 1.0$	$E_F/E_R = 2.5$
$(k_F a_s)^{-1} = -1$	120	80	80
$(k_F a_s)^{-1} = 0$	150	100	80
$(k_F a_s)^{-1} = 1$	180	120	100

4.4.1 局所粒子数密度

(4.34) 式より $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における局所粒子数密度 $n(z/d)/n_0$ の空間依存性は図 4.1 のようになる。粒子数密度は一様系の場合には空間依存性はないので一定になるが光格子中では周期ポテンシャルの変化に従って空間的に変化することがわかる。今回は $sE_R \sin^2(\pi z/d)$ という光格子のポテンシャルを考えているので、 $z/d = 0$ でポテンシャルエネルギーは最小になる。その結果、粒子数密度は最大になっていると考えられる。 E_F/E_R の減少、つまり光格子が深くなると $z = 0$ での密度は増加し、 $z = d$ では減少していて空間的な変化が大きくなっている。一様系では粒子数密度は一定であるが、光格子が深くなるにつれてフェルミ原子はより深い位置で凝縮すると考えられる。これらの振る舞いは $(k_F a_s)^{-1} = -1, 1$ においても同様の振る舞いである。

図 4.2 は $E_F/E_R = 1$ における $(k_F a_s)^{-1}$ を変化させたときの局所粒子数密度の空間依存性である。 $(k_F a_s)^{-1} = 1$ の BEC 領域になるにつれて密度は空間的に大きく変化している。これは引力相互作用が強いと、クーパー対のサイズが小さくなるので光格子のくぼみの位置で密度が増加するからであると考えられる。

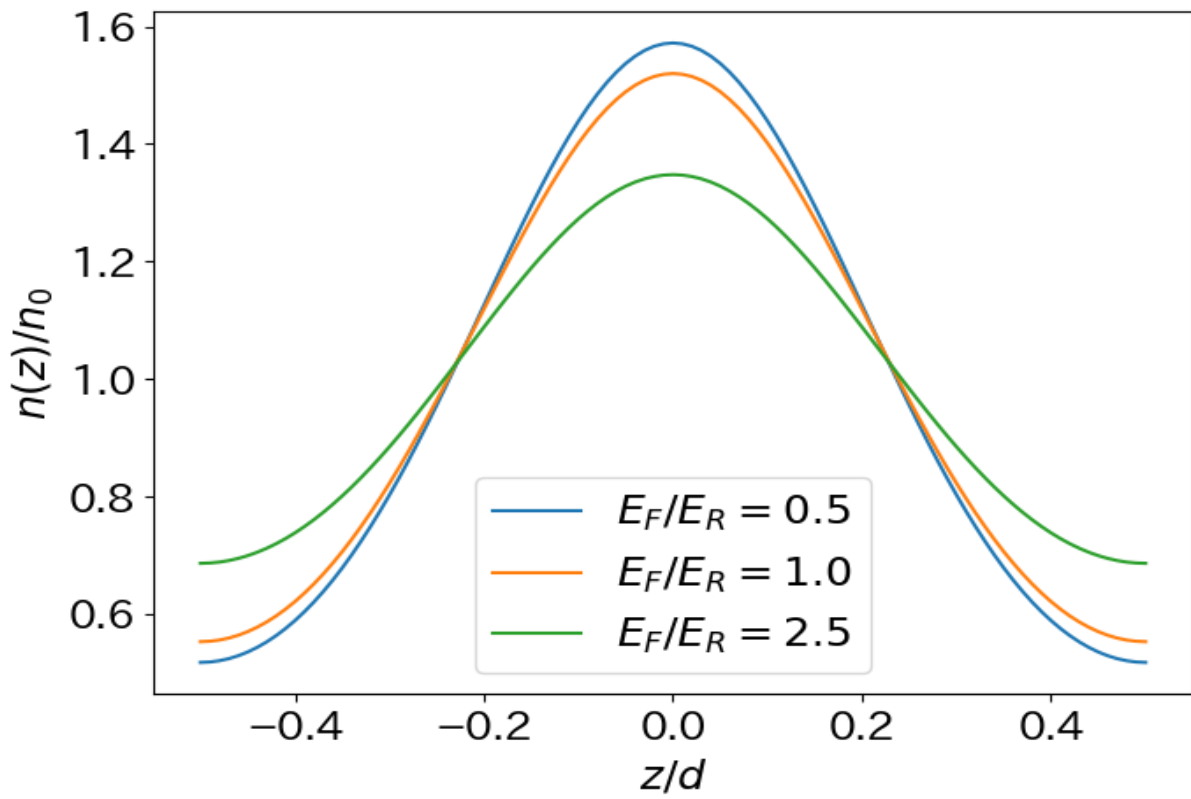


図 4.1: $(k_F a_s)^{-1} = 0$ における局所粒子数密度の空間依存性。

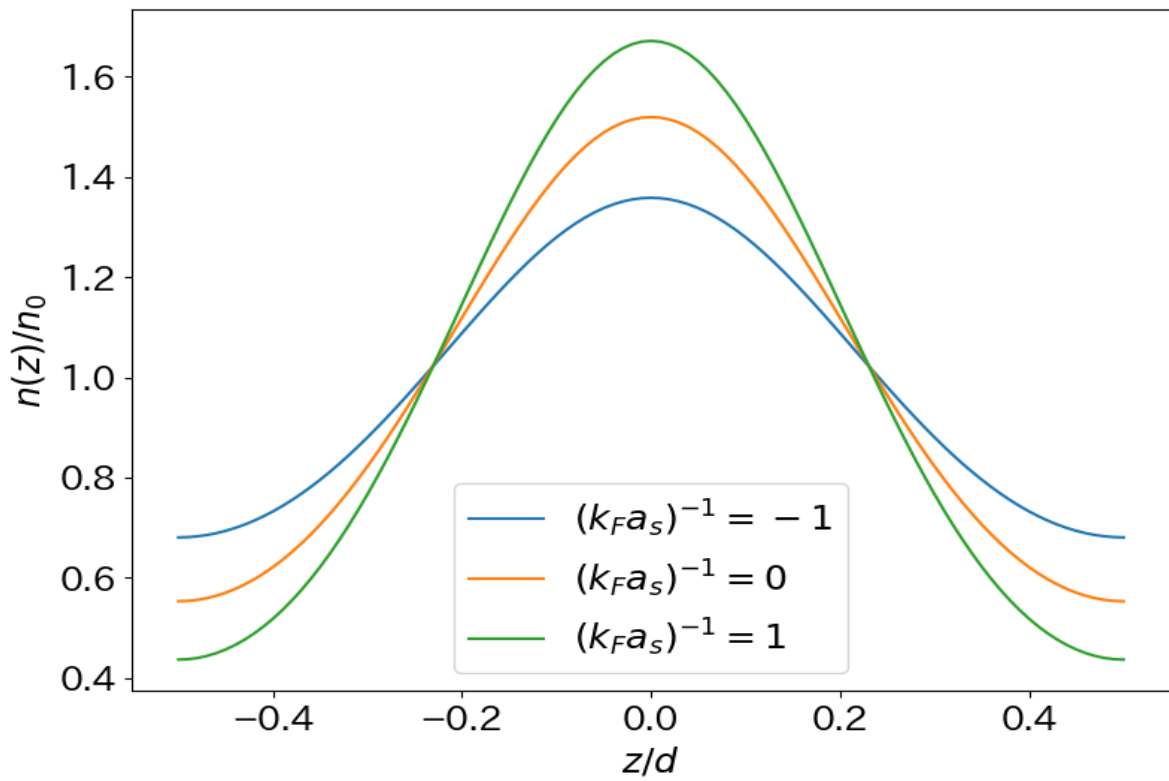


図 4.2: $E_F/E_R = 1$ における局所粒子数密度の空間依存性。

4.4.2 ギャップ

(4.31) 式よりギャップ $|\Delta(z/d)|/E_F$ の空間依存性はそれぞれ $(a_s k_F)^{-1} = -1, 0, 1$ に対して図 4.3、4.4、4.5 のようになる。点線は一様系の場合のギャップの値を表す [1, 17]。ギャップも周期ポテンシャルの変化に従って空間的に変化している。粒子数密度と同様にギャップも光格子のくぼみの位置 $z = 0$ で最大となるのでこの位置で多くのクーパー対が凝縮すると考えられる。 $z = 0$ において E_F/E_R が減少するとギャップは増加しているが、 $z = \pm d$ では $(a_s k_F)^{-1}$ の値により振る舞いが異なる。 $(a_s k_F)^{-1} = -1, 0$ では $E_F/E_R = 1.0$ から $E_F/E_R = 0.5$ になると空間全体で $|\Delta(z)|$ が増加している。これは図 4.2 より、引力相互作用が弱い領域では強い領域に比べてフェルミ原子は空間的に広がっているためだと考えられる。

図 4.6、4.7 はそれぞれ $z = 0$ でのギャップ $|\Delta(0)|/E_F$ と化学ポテンシャル μ/E_F のクロスオーバー領域における散乱長依存性である。実線は一様系の場合の結果である。どちらも E_F/E_R が減少するにつれて一様系の結果からずれていく。図 4.3-4.5 からわかるように E_F/E_R が増加すると一様系の結果に漸近していく。これらの結果より、ギャップや化学ポテンシャルはクロスオーバー領域における散乱長の変化だけでなく、光格子の深さにも依存することがわかる。よって、フェルミ原子の超流動の性質は光格子により空間的にも変化すると考えられる。

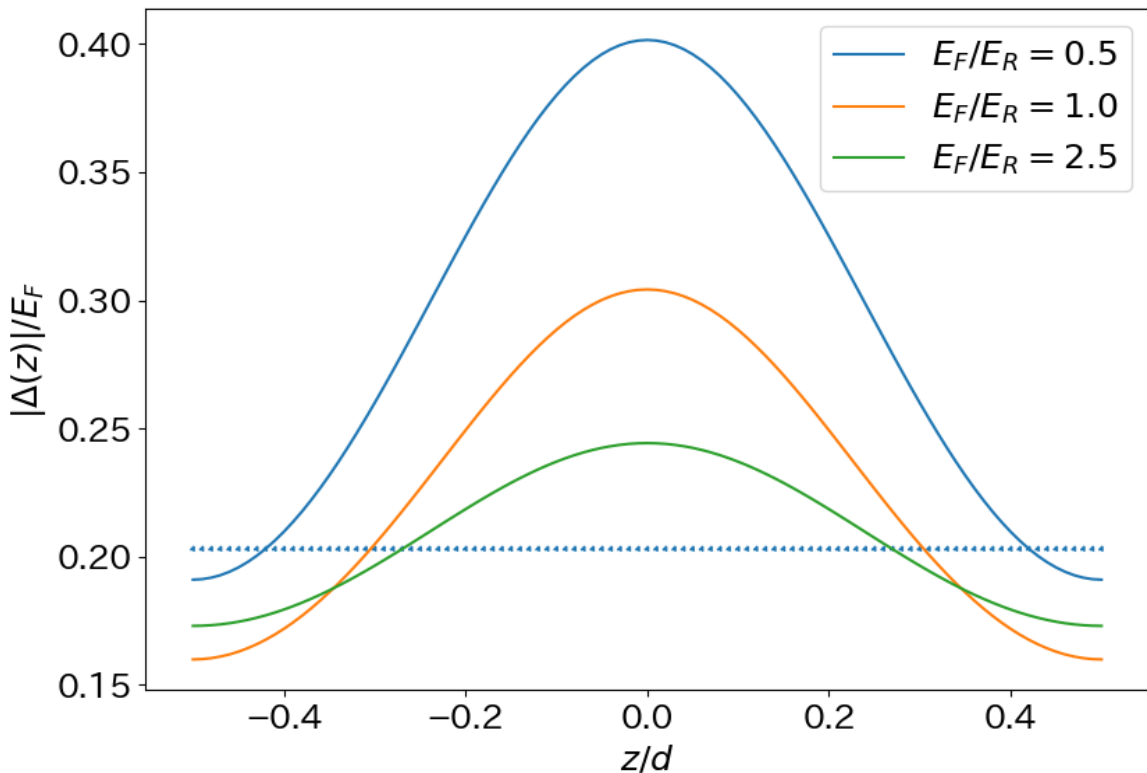


図 4.3: $(k_F a_s)^{-1} = -1$ におけるギャップの空間依存性。

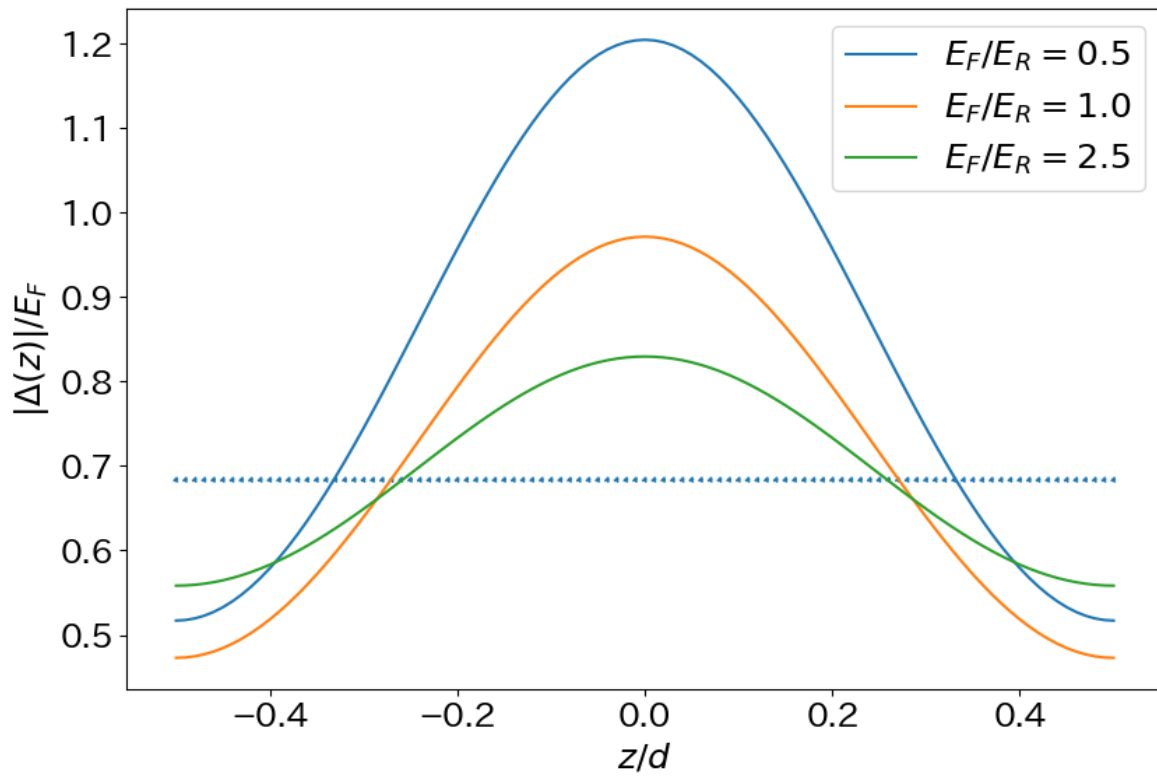


図 4.4: $(k_F a_s)^{-1} = 0$ におけるギャップの空間依存性。

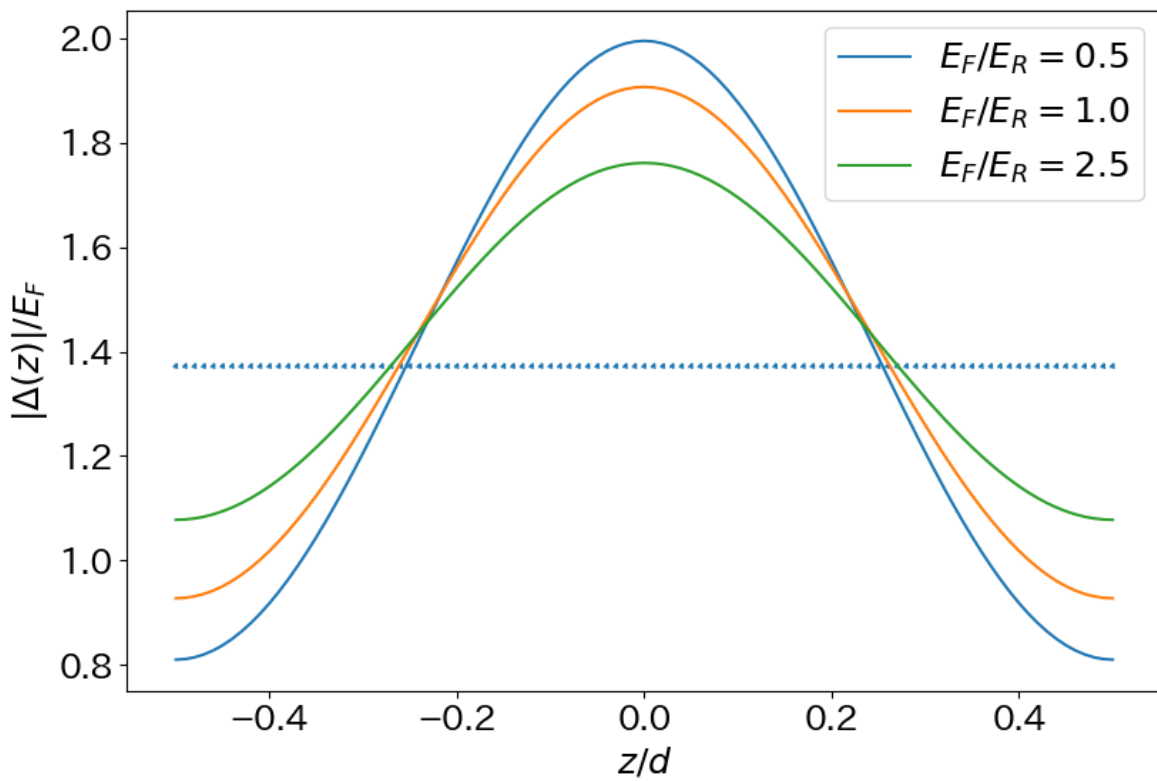


図 4.5: $(k_F a_s)^{-1} = 1$ におけるギャップの空間依存性。

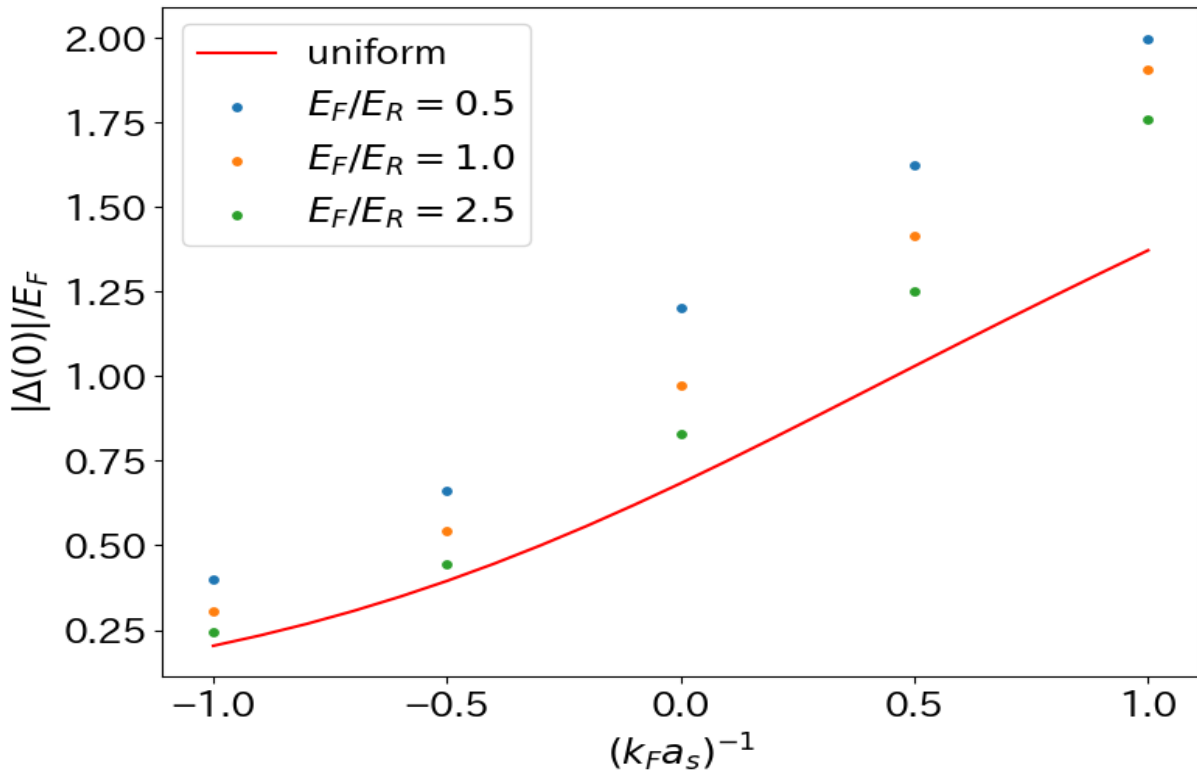
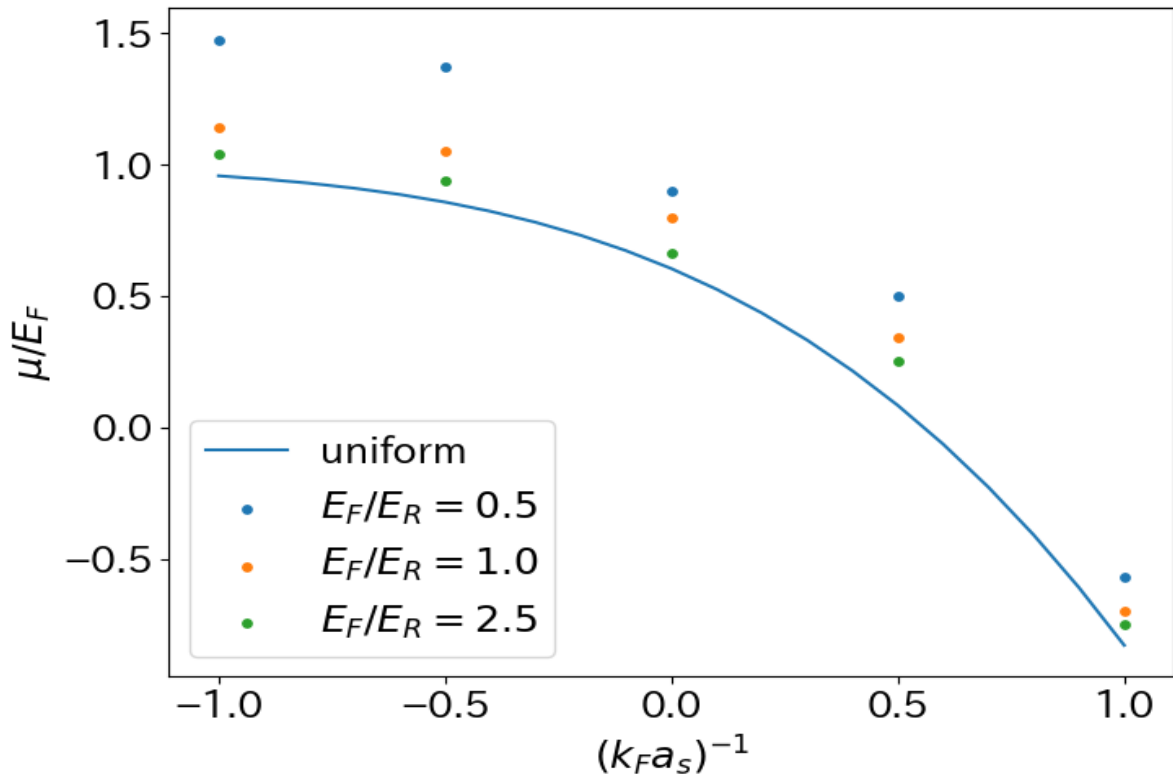
図 4.6: $z = 0$ におけるギャップの散乱長依存性。

図 4.7: 化学ポテンシャルの散乱長依存性。

第 5 章

まとめと今後の課題

本研究では光格子中のフェルミ原子気体を対象とした。クーパー問題を解くことにより、フェルミ原子は光格子中でもクーパー対を形成することを示した。光格子中では一様系に比べて、周期ポテンシャルの深さが深くなるに従って束縛エネルギーが大きくなりクーパー対を形成しやすくなることを示した。フェルミ原子がクーパー対を形成することを示したことにより、フェルミ原子の超伝導状態や超流動状態を考えることが可能になった。BCS-BEC クロスオーバー領域における光格子中のフェルミ原子気体を BdG 方程式を用いて数値的に解析した。超伝導ギャップと粒子数密度の空間依存性を求め、それらが周期ポテンシャルと同じ周期で空間的に変化することを示した。また、ギャップはクロスオーバー領域において光格子の深さが深くなるにつれて増加することを示した。これにより、超流動の性質はクロスオーバー領域において変化するだけでなく、周期ポテンシャルにより空間的にも変化すると考えられる。

今後の課題としては 2 つあげられる。1 つ目は粒子間相互作用を有効的なものではなく、Feshbach 共鳴を考慮したものにするることである。2 つ目は有限温度に拡張し超流動転移温度を計算することである。これらを考慮することにより実験で実現している超流動の性質との比較がしやすくなると考えられる。

付録 A

モンテカルロ積分

モンテカルロ積分とは乱数を使って数値積分をする手法である [18]。まずは 1 次元について説明する。次の積分

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (\text{A.1})$$

で積分区間 $[a, b]$ で n 個の乱数 x_i を発生させる。積分結果として次のようになる。

$$I \simeq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \quad (\text{A.2})$$

これは I を n 個の $f(x_i)$ の平均値とする考え方である。この時の誤差、つまり標準偏差は a/\sqrt{n} に比例する。精度を 1 桁上げるには乱数の個数 n を 2 桁上げる必要がある。

3 次元の場合も同様にできるが乱数を x, y, z で 3 セット発生させる必要があり結果は次のようになる。

$$I = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f(x, y, z) dx dy dz \simeq \frac{b-a}{n} \frac{d-c}{n} \frac{f-e}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \quad (\text{A.3})$$

D 次元の多重積分の場合、台形法などの数値積分ではそれぞれの方向で分割数を n とすると和の計算回数は n^D 回となるがモンテカルロ積分では次元によらず和の計算回数は n 回なので計算コストがかからないのがメリットである。

謝辞

本研究を進めるにあたり多くのご指導を頂いた指導教員の荒畑恵美子准教授には心から感謝いたします。また、ゼミでお世話になった森弘之教授、大塚博巳助教授、研究室の皆様にも感謝いたします。最後に、ここまで育ててくれた両親に感謝します。

参考文献

- [1] 大橋洋士 フェルミ粒子系超流動の物理
- [2] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. 80, 885 (2008).
- [3] P. G. de Gennes, Superconductivity of Metals and Alloys (Benjamin, New York, 1966).
- [4] 久我隆弘 レーザー冷却とボーズ凝縮 岩波
- [5] 田島裕之 極低温フェルミ原子気体の BCS-BEC クロスオーバー領域における熱力学的性質
- [6] L. N. Cooper, Phys. Rev. 104, 1189 (1956).
- [7] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. 108, 1175 (1957).
- [8] J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994)
- [9] Charles Kittel, Introduction to Solid State Physics, 8th Edition (Wiley, New York, 2004).
- [10] C. Gardiner and P. Zoller, The Quantum World of Ultra-Cold Atoms and Light Book III: Ultra-Cold Atoms, World Scientific
- [11] G. Watanabe, F. Dalfovo, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A 83, 033621 (2011).
- [12] S. Yoon, F. Dalfovo, T. Nakatsukasa, and G. Watanabe, New J. Phys. 18 (2016) 023011.
- [13] A. Bulgac, and Y. Yu, Phys. Rev. Lett. 88, 042504 (2002).
- [14] G. Bruun, Y. Castin, R. Dum, and K. Burnett, Eur. Phys. J. D 7, 433 (1999).
- [15] 高橋雅裕 粒子数インバランス下の中性フェルミ超流動体における量子渦の研究
- [16] G. Watanabe, G. Orso, F. Dalfovo, and L. P. Pitaevskii, Phys. Rev. A 78, 063619 (2008).
- [17] M. M. Parish, The BCS-BEC Crossover (World Scientific, Singapore, 2015).
- [18] 坂井徹 計算物理学 共立出版